Sur la convergence des séries orthonormales lacunaires.

Par GEORGES ALEXITS à Budapest.

1. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ un système de fonctions orthonormales définies dans l'intervalle (a, b). Il est connu[1]) que la série orthonormale

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

est presque partout convergente, si $\Sigma c_n^2 (\log n)^2 < \infty$. Pour obtenir des résultats plus nets, on peut introduire[2]) la notion de λ_n-lacunarité : la série (1) est appelée λ_n-lacunaire, si le nombre des coefficients $c_{k_\nu} \neq 0$, d'indices compris entre 2^n et 2^{n+1}, est $O(\lambda_{2^n})$ où $\{\lambda_n\}$ est une suite non-décroissante d'entiers positifs. Cette notion a permis de démontrer que, si la série (1) est presque partout sommable $(C, 1)$ et λ_n-lacunaire, la convergence de $\Sigma c_n^2 \lambda_n$ suffit pour la convergence presque partout de la série (1). M. RÉNYI[3]) a amélioré ce résultat dans le cas où λ_n est d'ordre $(\log n)^\alpha$ avec $1 < \alpha < 2$.

2. M. GÁL[4]) a amélioré considérablement le critère de convergence concernant les séries λ_n-lacunaires, en démontrant le théorème suivant:

Si la série (1) est presque partout sommable $(C, 1)$ et λ_n-lacunaire, la convergence de

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 (\log \lambda_n)^2$$

entraîne[4a]) *la convergence presque partout de la série orthonormale* (1).

Après avoir donné une démonstration très simple de ce théorème, nous démontrerons que *ce critère est, en un certain sens, le meilleur possible,* parce que nous construirons, à toute suite de nombres

---

1) Voir p. ex. S. KACZMARZ—H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warszawa—Lwów, 1935), p. 164.

2) G. ALEXITS, Sur la convergence des séries lacunaires, *ces Acta,* **11** (1948), p. 251—253.

3) A. RÉNYI, Remarque à la note précédente, *ces Acta,* **11** (1948), p. 253.

4) I. S. GÁL, Sur les séries orthogonales $C(1)$-sommables et $\lambda(n)$-lacunaires, *Comptes rendus Paris,* **227** (1948), p. 1140—1142.

4a) Si le nombre des coefficients non-nuls d'indices compris entre 2^n et 2^{n+1} est borné, on pose $\lambda_{2^n} = \lambda_n = 2$ pour tout n.

$w(n) \geqq (\log\log n)^2$ et $w(n) = o[(\log n)^2]$, une série orthonormale λ_n-lacunaire et presque partout sommable, mais partout divergente, malgré la convergence de la série $\Sigma c_n^2 w(\lambda_n)$.

3. Désignons, pour démontrer le théorème de M. Gál, par

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

la n-ième somme partielle de la série (1). Comme cette série est, d'après l'hypothèse, presque partout sommable $(C, 1)$, la suite $\{s_{2^n}(x)\}$ converge presque partout[5]). Nous n'avons donc qu'à démontrer que

$$s_m(x) - s_{2^n}(x) = o(1) \qquad (2^n < m < 2^{n+1}) \tag{2}$$

presque partout. Rappelons nous, à ce but, au lemme suivant[6]):

Il existe, à tout système orthonormal $\{\psi_n(x)\}$, une fonction $\delta_n(x)$ telle que pour $1 \leqq i \leqq j \leqq n$ on ait

$$\left| \sum_{k=i}^{j} a_k \psi_k(x) \right| \leqq \delta_n(x)$$

et

$$\int_a^b \delta_n^2(x)\,dx \leqq C(\log n)^2 \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \qquad (C = \text{constante absolue}).$$

Désignons par $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots$ les coefficients $\neq 0$ de la série (1) dont les indices sont compris entre 2^n et 2^{n+1}, en d'autres termes:

$$s_m(x) - s_{2^n}(x) = \sum_{2^n < k_\nu \leqq m} c_{k_\nu} \varphi_{k_\nu}(x).$$

Posons $a_\nu = c_{k_\nu}$ et $\psi_\nu(x) = \varphi_{k_\nu}(x)$, alors le lemme précédent assure l'existence d'une fonction $\delta_n(x)$, telle que

$$\left| \sum_{2^n < k_\nu \leqq m} c_{k_\nu} \varphi_{k_\nu}(x) \right| \leqq \delta_n(x) \qquad (2^n < m < 2^{n+1})$$

et, le nombre des $c_{k_\nu} = a_\nu$ étant $O(\lambda_{2^n})$, on a encore

$$\int_a^b \delta_n^2(x)\,dx \leqq O[(\log \lambda_{2^n})^2] \sum_{\nu=1}^{O(\lambda_{2^n})} a_\nu^2 = O[(\log \lambda_{2^n})^2] \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2 =$$

$$= O(1) \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} c_k^2 (\log \lambda_k)^2.$$

Il s'ensuit donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \delta_n^2(x)\,dx = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 (\log \lambda_n)^2 < \infty,$$

---

[5]) L. c. [1]), p. 161.

[6]) L. c. [1]), p. 162.

ce qui entraîne la convergence presque partout de la série $\Sigma \delta_n^2(x)$; c'est-à-dire: $\delta_n(x) = o(1)$ presque partout. La relation (2) est donc démontrée et c'était justement ce que nous avons eu à faire.

4. *A toute suite non-décroissante* $\{w(n)\}$ *de nombres positifs tels que* $(\log\log n)^2 \leqq w(n) = o[(\log n)^2]$, *on peut construire une série orthonormale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{3}$$

jouissant des propriétés suivantes: elle est 1° *presque partout sommable* $(C, 1)$; 2° λ_n*-lacunaire;* 3° *partout divergente;* 4° $\Sigma c_n^2 w(\lambda_n) < \infty$.

En effet, M. MENCHOV[7]) a construit une série orthonormale

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$$

pour laquelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w(n) < \infty,$$

et telle qu'il existe un $\alpha > 0$ et une suite d'indices $\nu_1 < \nu_2 < \ldots$, de sorte qu'on peut attacher, à tout point x de (a, b), un $m(x) > \nu_n$ et $< \nu_{n+1}$ avec

$$\left| \sum_{i=m(x)}^{\nu_{n+1}-1} a_i \psi_i(x) \right| \geqq \alpha > 0. \tag{4}$$

Soit μ_k le k-ième indice $\neq \nu_n$ et désignons par i_k l'entier $[k^{\log k}]$. Posons

$$c_{i_k} = a_{\mu_k}, \qquad \varphi_{i_k}(x) = \psi_{\mu_k}(x).$$

Les fonctions $\varphi_\nu(x)$ avec $\nu \neq i_k$ soient successivement égales aux $\psi_{\nu_k}(x)$ et posons pour ces indices $c_\nu = 0$. Démontrons d'abord que la série (3) ainsi définie jouit de la propriété 1°. Pour cela, il suffit[8]) de démontrer que $\Sigma c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty$. Or

$$\sum_{n=3}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 = \sum_{n=3}^{\infty} c_{i_n}^2 (\log\log i_n)^2 = \sum_{n=3}^{\infty} a_{\mu_n}^2 (\log\log i_n)^2 \leqq$$

$$\leqq 4 \sum_{n=3}^{\infty} a_{\mu_n}^2 (\log\log n)^2 \leqq 4 \sum_{n=3}^{\infty} a_{\mu_n}^2 w(n) \leqq 4 \sum_{n=3}^{\infty} a_{\mu_n}^2 w(\mu_n) < \infty.$$

La série (3) jouit donc de la propriété 1°. Il est évident qu'elle est λ_n-lacunaire, mais nous avons besoin, pour les suivants, d'évaluer λ_n. On voit immédiatement que le plus petit nombre k pour lequel $k^{\log k} \geqq 2^n$ est[9]) $2^{\sqrt{n}}$ et le plus grand nombre k pour lequel $k^{\log k} \leqq 2^{n+1}$ est $2^{\sqrt{n+1}}$. Entre les indices 2^n et 2^{n+1} il y a donc $2^{\sqrt{n+1}} - 2^{\sqrt{n}} = O\left(\frac{2^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\right)$ termes

---

7) L. c. 1), p. 167.

8) L. c. 1), p. 190.

9) Nous entendons, pour simplifier la notation, par le symbole "log" le logarithme de base 2, ce qui ne change rien.

non-nuls de la série (3). C'est-à-dire qu'on peut poser $\lambda_{2^n} = 2^{\sqrt{n}} / \sqrt{n}$ d'où,

$$\lambda_n < 2^{\sqrt{\log n}}.$$

Nous démontrons maintenant que la série (3) possède aussi la propriété 4°. En effet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 w(\lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{i_n}^2 w(\lambda_{i_n}) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mu_n}^2 w\left(2^{\sqrt{\log i_n}}\right).$$

Mais $i_n \leqq n^{\log n}$, donc $2^{\sqrt{\log i_n}} \leqq n$, par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 w(\lambda_n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mu_n}^2 w(n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mu_n}^2 w(\mu_n) < \infty.$$

La série (3) possède donc les propriétés 1°, 2°, 4°. Pour démontrer 3°, il ne faut qu'envisager l'inégalité (4) où ne figurent que des $\psi_{\mu_k}(x) = \varphi_{i_k}(x)$, c'est-à-dire que des $\varphi_k(x)$ avec des coefficients $c_k \neq 0$. La relation (4) assure donc, pour tout n et tout point x de (a, b), l'existence d'un indice l et d'un indice variable $p(x) > n$, de sorte que

$$\left| \sum_{k=p(x)}^{l} c_k \varphi_k(x) \right| \geqq \alpha > 0.$$

Par conséquent, la série (3) est partout divergente, ce qui achève la démonstration.

5. Le théorème démontré au paragraphe **3** permet d'énoncer le corollaire suivant[10]:

Si, pour un $r > 0$ quelconque, la série (1) *est* $(\log n)^r$*-lacunaire et*

(5) $$\sum_{n=3}^{\infty} c_n^2 (\log\log n)^2 < \infty,$$

la série (1) *est presque partout convergente.*

En effet, la condition (5) implique la sommabilité $(C, 1)$ presque partout de la série (1) et, en même temps, (5) constitue, dans le cas de $(\log n)^r$-lacunarité, aussi la deuxième partie des prémisses de notre théorème.

(Reçu le 23 novembre 1948)

---

[10]) L. c. [4]), p. 1141.